GEOMETRÍA LINEAL, grupo B

Examen final, 9 de febrero de 2012

Tiempo: 3 horas

Justifica todas tus respuestas

1) (2 puntos) Di si las afirmaciones a), b) y c) son verdaderas o falsas y responde d):

a) Una aplicación afín de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ que deja fijos cuatro puntos no coplanarios (es decir, no contenidos en un plano) es necesariamente la identidad.

b) Una aplicación proyectiva de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ que deja fijos cuatro puntos no coplanarios es necesariamente la identidad.

c) Una aplicación proyectiva de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ que deja fijos los puntos de un plano Π y un punto p no contenido en Π es necesariamente una proyectividad.

d) Encuentra todos los puntos fijos de la aplicación proyectiva

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{P}^3_{\mathbf{k}} & \dashrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{k}} \\ & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0 + 3x_1 : 3x_0 + x_1 : -2x_2 : -2x_3) \end{array}$$

¿Es f una proyectividad?

2) (2 puntos) Sea $\mathbf{P}$ un espacio proyectivo de dimensión n y sean Λ_1 y Λ_2 dos subespacios proyectivos de $\mathbf{P}$.

a) Enuncia y demuestra la fórmula de Grassmann, que relaciona las dimensiones de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ y $< \Lambda_1, \Lambda_2 >$.

b) Demuestra que si Λ_1 y Λ_2 son disjuntos y sus dimensiones suman $n-1$, entonces para todo $p \notin \Lambda_1$, la intersección de $< \Lambda_1, p >$ con Λ_2 consiste en un solo punto.

3) (3 puntos) En el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos los puntos $o = (0,1,1)$, $p_1 = (1,1,0)$, $p'_1 = (-1,1,2)$ y $p_2 = (-1,0,0)$. Sea $l =< p_1, p'_1 >$ y sea f una isometría de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ que intercambia p_1 y p'_1 (es decir, tal que $f(p_1) = p'_1$ y $f(p'_1) = p_1$).

a) Demuestra que o es un punto fijo de f, que l es una recta invariante por f y que el plano Π perpendicular a l por p es invariante por f.

b) Supongamos además que f deja fijo p_2 y conserva la orientación. Halla las ecuaciones de f respecto del sistema de referencia canónico. Describe f geométricamente.

4) (3 puntos) Sea C la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$, sea $p = (0,0)$ y sea $\overline{C}$ el completado proyectivo de C.

a) Decide cuál es la clase afín de C.

b) Recuerda que la recta tangente a C en p es aquella recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que su completado proyectivo es la tangente a $\overline{C}$ en p. Halla la ecuación de la tangente l a C en p. ¿Existe otra recta paralela a l que sea tangente a C?

c) Dado un punto o de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ llamamos s_o a la simetría (central) con base (o centro) o. Se dice que o es un *centro de simetría* de C si $s_o(C) = C$. Demuestra que C no tiene ningún centro de simetría.

Indicación: En clase *no se ha demostrado* la relación que hay entre centro de una cónica y centro de simetría de una cónica, por lo que *no puedes usar* esa relación en tu argumento, salvo que la demuestres correctamente antes.

GEOMETRÍA LINEAL, grupo B

Examen final, 4 de septiembre de 2012

Tiempo: 3 horas

Justifica todas tus respuestas

1) (2,5 puntos)

a) Define aplicación afín y aplicación lineal asociada a una aplicación afín.

b) Demuestra que una aplicación afín es inyectiva si y solo si su aplicación lineal asociada es inyectiva.

c) Demuestra que una aplicación afín trasforma puntos alineados es puntos alineados.

2) (2,5 puntos) En el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos la isometría f que se obtiene al componer la simetría especular con respecto al plano de ecuación $x + y - z = 1$ con la traslación de vector $(1, 0, 1)$. Da las ecuaciones de f respecto del sistema de referencia cartesiano canónico de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$.

3) (3 puntos) En el espacio proyectivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ Consideramos la aplicación proyectiva f de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ a $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ que tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

como matriz respecto del sistema de referencia proyectivo canónico.

a) Decide si f está definida en todos los puntos de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$.

b) Calcula todos los puntos fijos de f.

c) Encuentra una recta invariante de f.

d) Calcula la imagen inversa y la imagen directa por f de la recta de ecuaciones $x_0 = x_1 - x_2 = 0$.

4) (2 puntos) En $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos la cónica C de ecuación $x_0^2 + x_1^2 - 2x_2^2 = 0$.

a) Di qué clase de cónica proyectiva es C.

b) Encuentra, si es posible, rectas L_1, L_2, L_3, L_4 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que, en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \setminus L_j$, la cónica afín $C \setminus L_j$ sea

- i) una elipse real si $j = 1$;
- ii) una parábola si $j = 2$;
- iii) una hipérbola si $j = 3$;
- iv) un par de rectas paralelas reales si $j = 4$.

GEOMETRÍA LINEAL, grupo A
Examen final, 6 de febrero de 2013
Tiempo: 3 horas

Justifica todas tus respuestas

1) (2 puntos) Sean $p_0, p_1, \ldots, p_n$ puntos afínmente independientes de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y sea f una aplicación afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. Demuestra que f es un isomorfismo si y solo si $f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_n)$ son puntos afínmente independientes de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$.

2) (1 punto) Sea $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el plano euclídeo estándar. Di cuántos puntos fijos tiene el completado proyectivo de un giro de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y cuántos puntos fijos tiene el completado proyectivo de una simetría axial con deslizamiento de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

3) (4 puntos) En el espacio proyectivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos la recta l_1 que pasa por los puntos $(1:1:0:1)$ y $(0:1:1:1)$ y la recta l_2 de ecuaciones $x_0 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sea f una aplicación proyectiva que deja fijos todos los puntos de las rectas l_1 y l_2.

a) ¿Es f única? ¿Es f una proyectividad?
b) Si f no es la identidad, halla los subespacios invariantes de f.
c) Si $f((1:0:0:-1)) = (1:0:0:-3))$, halla las ecuaciones de f respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$.

4) (3 puntos) Para cada $t \in \mathbf{R}$ sea C_t la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación

$$(t+1)x + (t-1)y - (t+1)x^2 + xy + ty^2 = 0.$$

a) Para cada t, clasifica afínmente C_t.
b) Consideramos C_1, que es la cónica de ecuación $2x - 2x^2 + xy + y^2 = 0$. Calcula sus puntos en el infinito y sus asíntotas.
c) Sea s la simetría euclídea respecto de la recta de ecuación $x - y - 1 = 0$. Calcula $s(C_1)$.

GEOMETRÍA LINEAL, grupo A
Examen final, 3 de septiembre de 2013
Tiempo: 3 horas

Justifica todas tus respuestas

1) (3,5 puntos) En el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos la recta $l = (1,0,1) + L((1,1,1))$ y el plano Π de ecuación $x+y+z=2$. Sean f y g aplicaciones afines que cumplen lo siguiente:

(i) f y g dejan fijos todos los puntos de la recta l.
(ii) f y g dejan el plano Π invariante.
(iii) La restricción de f a Π es una homotecia de razón 2.
(iv) La restricción de g a Π es un giro de ángulo $\pi/2$.

a) ¿Es f única? ¿Es f un isomorfismo afín? ¿Es f una isometría?
b) ¿Es g única? ¿Es g un isomorfismo afín? ¿Es g una isometría?
c) Calcula todos los puntos fijos y todas las rectas invariantes de f.
d) Halla las ecuaciones de f respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$.

2) (2 puntos) En $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos el plano Π de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$ y la aplicación proyectiva f de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ dada por $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (2x_1 + 2x_2 : 2x_2 : 3x_0 - 3x_1 + x_2 - x_3 : 3x_0 - x_1 + x_2 - x_3)$.

a) Encuentra el centro y la imagen de f. ¿Es f una proyectividad? ¿Es f una proyección?
b) Encuentra los puntos fijos de f. Encuentra las rectas de Π que son invariantes por f.

3) (2 puntos)

a) Define sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$.
b) Dada una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, demuestra que $\mathscr{R}' = \{p_2, p_3, p_1; p_0\}$ es también una referencia proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y da una matriz de cambio de coordenadas de $\mathscr{R}'$ a $\mathscr{R}$.

4) (2,5 puntos) Sea C la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación

$$x - 3y - x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

y sea $\overline{C}$ el completado proyectivo de C.

a) Halla los puntos del infinito de C. ¿Qué clase de cónica afín es C?
b) Calcula la recta polar del punto $(0 : 1 : -1)$ respecto de $\overline{C}$.
c) Encuentra todas las rectas tangentes a C que sean paralelas a la recta de ecuación $x + y = 0$.